

Définition 32 (cofacteur).

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Le cofacteur c_{ij} est le nombre défini par

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|,$$

$$\begin{aligned} i+j \text{ pair} &\Rightarrow (-1)^{i+j} = 1 \\ i+j \text{ impair} &\Rightarrow (-1)^{i+j} = -1 \end{aligned}$$

où A_{ij} est la matrice des cofacteurs.

Conséquence :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}c_{11} + \dots + a_{n1}c_{n1} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i1}c_{i1} \\ &\text{(dév. par rapport à la 1^{re} colonne)} \end{aligned}$$

Théorème 24. Le déterminant d'une matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ peut être calculé par un développement

1. selon n'importe quelle ligne de A :

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + \dots + a_{in}c_{in}$$

$$\begin{aligned} (1 \leq i \leq n) \\ i^{\text{e}} \text{ ligne} \end{aligned}$$

2. selon n'importe quelle colonne de A :

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + \dots + a_{nj}c_{nj}$$

$$\begin{aligned} (1 \leq j \leq n) \\ j^{\text{e}} \text{ colonne} \end{aligned}$$

Cas particuliers

1) Matrices diagonales

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

en développant par rapport à la 1^{re} colonne ou la 1^{re} ligne.

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \text{il existe } 1 \leq i \leq n \text{ avec } a_{ii} = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{triangulaire supérieure}$$

$a_{ij} = 0 \text{ si } i > j$

2) Matrices triangulaires

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

en développant par rapport à la 1^{re} colonne à chaque étape.

Remarque En pratique, on cherche à développer selon la ligne ou la colonne qui comporte le plus de zéros.

Exemple Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$|A| = -1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{21}} + 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{22}} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{23}}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = -|A_{21}|$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = +|A_{22}|$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} |A_{23}| = -|A_{23}|$$

$$= -(-3-4) - (2-2 \cdot (-3))$$

$$= 7 - 8 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\det(A) = a_{21} \cdot C_{21} + a_{22} \cdot C_{22} + a_{23} \cdot C_{23}$$

⚠ règle des signes: $\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$ on compte le nombre de pas jusqu'à la position "11"

3.2 Propriétés des déterminants

Le but de cette section est d'obtenir des propriétés permettant de simplifier le calcul du déterminant d'une matrice en passant par la forme échelonnée.

Rappel : Echelonner une matrice A revient à multiplier A à gauche par des matrices élémentaires. Etudions dans un premier temps le déterminant des matrices élémentaires.

Proposition

1) Soit $E_{ij} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matrice élémentaire obtenue en échangeant les lignes i et j de I_n pour $1 \leq i \neq j \leq n$. Alors

$$\det(E_{ij}) = -1$$

2) Soit $E_i(\alpha) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matrice élémentaire obtenue à partir de I_n en multipliant la i^e ligne par α pour un $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $1 \leq i \leq n$. Alors

$$\det(E_i(\alpha)) = \alpha$$

3) Soit $E_{ij}(\alpha) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matrice élémentaire obtenue à partir de I_n en ajoutant la j^e ligne multipliée par α à la i^e ligne pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $1 \leq i \neq j \leq n$. Alors

$$\det(E_{ij}(\alpha)) = 1$$

Etudions l'effet des opérations élémentaires sur le déterminant d'une matrice dans le cas d'un exemple :

Exemple : Considérons la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = -1$$

Type I : $E_{12} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(E_{12} A) = +1, \quad \det(E_{12}) = -1$$

Type II : $E_2(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(E_2(3) \cdot A) = -3, \quad \det(E_2(3)) = 3$$

Type III : $E_{12}(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(E_{12}(3) A) = -1, \quad \det(E_{12}(3)) = 1$$

On observe que pour tout type de matrice élémentaire E , on a

$$\underline{\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)}$$

Théorème 25. Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et E une matrice élémentaire obtenue à partir de I_n . Alors

$$\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A).$$

$$\text{En particulier, } \det(A) = \frac{\det(EA)}{\det(E)}$$

puisque $\det(E) \neq 0$.

Stratégies pour le calcul du déterminant

1) On développe par rapport à une ligne ou colonne avec beaucoup de zéros.

2) On échelonne la matrice en tenant compte du fait que

- les opérations élémentaires de type I changent le signe du déterminant,
- multiplier une ligne de la matrice par un scalaire non nul α multiplie le déterminant par le même scalaire,
- les opérations élémentaires de type III ne changent pas le déterminant.

$$A \overset{p \text{ opérations } (*)}{\sim} \dots \sim U$$

où U peut être une matrice échelonnée (triang. sup.) ou une matrice intermédiaire

$$E_p \cdots E_2 E_1 A = U$$

où les $E_1, \dots, E_p$ sont des matrices él. correspondant aux opérations (*)

$$\det(A) = \frac{\det(u)}{\det(E_1) \cdot \dots \cdot \det(E_p)}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

on divise par $\frac{1}{2}$

$$\downarrow$$

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{(\times) op III}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & -4 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & 16 & -24 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \\ 16 & -24 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 10 & -2 \\ 16 & -24 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 16 & -24 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 24 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 10 \cdot (1 \cdot 1 \cdot (-1/5)) = 24$$

(voir moodle pour plus de détails !)

Théorème 26. Soient $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ deux matrices. Alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Remarque En général, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

En effet, soient $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(I_2) = 1$$

$$\det(B) = 0$$

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Preuve (idée)

Le théorème est vrai si A est une matrice élémentaire.
(th. 25)

1er cas : A est inversible.

Alors A est en fait un produit de matrices élémentaires pour lesquelles on sait que le déterminant est multiplicatif.

2^e cas : A non inversible

Dans ce cas AB n'est pas inversible non plus
(cf. ex. série 6)

Donc $\det(A) = 0 = \det(AB)$
et la formule est vérifiée.

Théorème 27. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors

1. $\det(A^T) = \det(A)$

2. A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Remarque

1. développer A^T par rapport à la i^{e} ligne revient à développer A par rapport à la i^{e} colonne.

On conclut par le théorème 24.

2. Si A est inversible, il existe A^{-1} avec

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n. \text{ Donc}$$

$\Rightarrow$

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$$

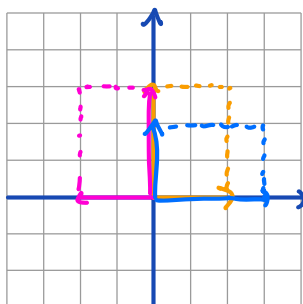
donc $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont non nuls.

$$\text{De plus } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

$(*) \Leftarrow (**)$ Si A est ^{non(*)} non inversible, la forme E admet au moins un zéro sur la diagonale principale
 $\text{non}(\text{non}(*)) \Rightarrow \text{non}(**)$

3.3 Interprétation géométrique du déterminant

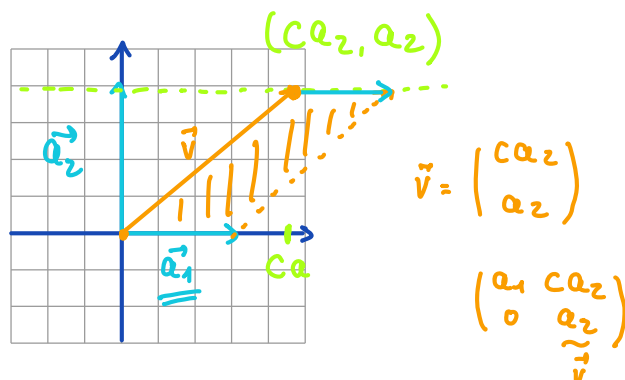
Dans $\mathbb{R}^2$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 6 = \text{aire du rectangle}$$

$$\det(A') = -6 \Rightarrow |\det(A')| = \text{aire du rectangle}$$



$$\text{Si } A'' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

l'aire reste la même
(on échange longueur et largeur)

Si $A \sim B = \begin{pmatrix} a_1 & ea_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ ($L_1 \rightarrow L_1 + cL_2$)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2$

Cette opération ne change pas l'aire géom. de la figure. On obtient un parallélogramme de même base (longueur $|a_1|$) et de même hauteur $|a_2|$.

Si A est inversible, on peut rendre A diag. par des op. élémentaires.

Théorème 28.

1. Si $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ alors $|\det(A)| = \text{aire du parallélogramme défini par les vecteurs colonnes de } A$.

2. Si $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ alors $|\det(A)| = \text{volume du parallélépipède défini par les 3 vecteurs colonnes de } A$.

Remarque

1) dans $\mathbb{R}^2$:

$A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2)$ singulière

$\Leftrightarrow \vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ le parallélogramme est dégénéré

2) dans $\mathbb{R}^3$:

Si A est singulière, les colonnes de A sont lin. dép. et engendrent un

plan ou une droite $\Rightarrow$ le parallélépipède est dégénéré.